

PENENTUAN FAKTOR KUADRAT DENGAN METODE BAIRSTOW

Susilo Nugroho (M0105068)

1. LATAR BELAKANG MASALAH

Polinomial real berderajat $n \geq 0$ adalah fungsi yang mempunyai bentuk

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

dengan $a_n \neq 0$, dan $a_i \in R$. Polinomial real mempunyai peran yang penting diantaranya dalam teori fungsi dan teori bilangan. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode untuk menentukan semua akar polinomial real secara efisien. Dalam menentukan akar polinomial real, perlu ditentukan terlebih dahulu faktor kuadrat polinomial real tersebut. Dalam hal ini, faktor kuadrat digunakan karena lebih efektif dari pada pembagi linier. Dengan faktor kuadrat, dapat ditentukan dua akar sekaligus baik akar real maupun kompleks. Faktor kuadrat polinomial real dapat ditentukan dengan metode Bairstow. Menurut [1], metode Bairstow pertama kali dikenalkan oleh Leonard Bairstow. Metode Bairstow menggunakan metode Newton sehingga laju konvergensinya kuadrat.

2. PERUMUSAN MASALAH

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang dibahas yaitu

- (1) bagaimana penurunan algoritma Bairstow?
- (2) bagaimana penerapan metode Bairstow pada suatu kasus?
- (3) bagaimana menganalisis eror secara numerik metode Bairstow?

3. TUJUAN

Tujuan makalah ini adalah

- (1) menjelaskan tentang penurunan algoritma metode Bairstow
- (2) menjelaskan tentang penerapan metode Bairstow pada suatu kasus

(3) menganalisis eror secara numerik metode Bairstow

4. PENURUNAN ALGORITMA

Penurunan algoritma metode Bairstow mengacu pada May [3]. Polinomial real dapat dibagi dengan pembagi kuadrat sehingga dapat diekspresikan sebagai

$$p_n(x) = (x^2 - ux - v)q_{n-2}(x) + b_1(x - u) + b_0$$

dengan $b_1(x - u) + b_0$ merupakan suku sisa dari pembagian tersebut. Apabila suku sisa tersebut bernilai nol, maka pembagi $(x^2 - ux - v)$ merupakan faktor kuadrat $p_n(x)$. Karena $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ dan polinomial terdeflasi $q_{n-2}(x) = \sum_{i=2}^n b_i x^{i-2}$ maka polinomial real dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i x^i &= (x^2 - ux - v) \sum_{i=2}^n b_i x^{i-2} + b_1(x - u) + b_0 \\ &= \sum_{i=0}^n b_i x^i - u \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} x^j - v \sum_{k=0}^{n-2} b_{k+2} x^k, \text{ untuk } j = i + 1 \text{ dan } k = i + 2 \\ &= \sum_{i=0}^n b_i x^i - u \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i - v \sum_{i=0}^{n-2} b_{i+2} x^i, \text{ untuk } j = i \text{ dan } k = i. \end{aligned}$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien x dapat diperoleh

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - ub_n \\ a_i &= b_i - ub_{i+1} - vb_{i+2}, \text{ dimana } i = n - 2, n - 3, \dots, 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Karena polinomial terdeflasi $q_{n-2}(x)$ merupakan polinomial yang koefisien-koefisiennya adalah b_i maka dari persamaan (4.1) ditentukan koefisien b_i yaitu

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + ub_n \\ b_i &= a_i + ub_{i+1} + vb_{i+2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Untuk $i = 1$ dan $i = 0$ diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + ub_2 + vb_3 \\ b_0 &= a_0 + ub_1 + vb_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pada persamaan (4.3), tampak bahwa b_1 dan b_0 tergantung pada u dan v . Oleh karena itu, dalam menentukan faktor kuadrat, secara implisit tergantung pada pemilihan $u = u^*$ dan $v = v^* \ni b_1 = b_0 = 0$. Apabila $u = u^*$ dan $v = v^*$ maka $b_1 = b_0 = 0$ dan berlaku

$$\begin{aligned} 0 = b_1 &= a_1 + u^*b_2 + v^*b_3 \\ 0 = b_0 &= a_0 + u^*b_1 + v^*b_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Persamaan (4.4) dapat diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned} b_1(u^*, v^*) &= 0 \\ b_0(u^*, v^*) &= 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode Newton untuk sistem, diberikan (u, v) , kemudian dicari δu dan δv sedemikian sehingga $(u + \delta u, v + \delta v)$ merupakan nilai pendekatan dari (u^*, v^*) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} b_1(u + \delta u, v + \delta v) &= 0 \\ b_0(u + \delta u, v + \delta v) &= 0. \end{aligned}$$

Kemudian dengan ekspansi deret Taylor dapat diperoleh

$$\begin{aligned} b_1(u, v) + \frac{\partial b_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v} \delta v &\approx 0 \\ b_0(u, v) + \frac{\partial b_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v} \delta v &\approx 0. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v} \delta v &= -b_1(u, v) \\ \frac{\partial b_0}{\partial u} \delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v} \delta v &= -b_0(u, v). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Bentuk (4.5) dapat diekspresikan dengan perkalian matriks

$$J \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}, \text{ dimana } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial u} & \frac{\partial b_1}{\partial v} \\ \frac{\partial b_0}{\partial u} & \frac{\partial b_0}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ adalah matriks Jacobian.}$$

Turunan parsial dalam matriks Jacobian perlu dievaluasi secara efisien. Untuk itu dapat digunakan metode Horner

$$\begin{aligned}
 b_n &= a_n \\
 b_{n-1} &= a_{n-1} + ub_n \\
 b_i &= a_i + ub_{i+1} + vb_{i+2}, \text{ dimana } i = n-2, n-3, \dots, 0.
 \end{aligned}$$

Untuk turunan pertama terhadap u , diperoleh

$$\frac{\partial b_n}{\partial u} = 0.$$

Didefinisikan c_i sebagai

$$c_i = \frac{\partial b_{i-1}}{\partial u} = 0$$

sehingga diperoleh relasi rekursif antara c_i dan b_i yaitu

$$\begin{aligned}
 c_n &= b_n \\
 c_{n-1} &= b_{n-1} + uc_n \\
 c_i &= b_i + uc_{i+1} + vc_{i+2}, \text{ dimana } i = n-2, n-3, \dots, 1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pada persamaan (4.6), untuk $i = 1$ dan $i = 2$ diperoleh

$$c_1 = \frac{\partial b_0}{\partial u}, c_2 = \frac{\partial b_1}{\partial u}.$$

Kemudian untuk turunan parsial terhadap v adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b_n}{\partial v} &= 0 \\
 \frac{\partial b_{n-1}}{\partial v} &= 0 \\
 \frac{\partial b_{n-2}}{\partial v} &= b_n \\
 \frac{\partial b_{n-3}}{\partial v} &= u \frac{\partial b_{n-2}}{\partial v} + b_{n-1} \\
 \frac{\partial b_i}{\partial v} &= u \frac{\partial b_{i+1}}{\partial v} + b_{i+2} + v \frac{\partial b_{i+2}}{\partial v}, \text{ dimana } i = n-4, n-5, \dots, 0.
 \end{aligned}$$

Jika dibandingkan dengan relasi rekursif untuk c_i , diperoleh bahwa

$$c_i = \frac{\partial b_{i-2}}{\partial v}. \tag{4.7}$$

Pada persamaan (4.7), untuk $i = 12$ dan $i = 3$ diperoleh persamaan

$$c_2 = \frac{\partial b_0}{\partial v}, c_3 = \frac{\partial b_1}{\partial v}.$$

Nilai matriks Jacobian dapat diperoleh secara dengan satu pembagian sintetik ekstra, yaitu dengan bentuk kuadrat $(x^2 - ux - v)$ untuk mendapatkan c_i sehingga dapat diperoleh

$$J = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Karena c_i sudah diperoleh maka δu dan δv dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan linier

$$\begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Sistem (4.8) dapat diselesaikan dengan eliminasi Gauss sehingga dapat ditentukan nilai pendekatan yang baru u_{new} dan v_{new} yaitu

$$\begin{aligned} u_{new} &= u + \delta u \\ v_{new} &= v + \delta v. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Proses ini dapat dilakukan secara iterasi untuk menentukan nilai pendekatan yang jauh lebih dekat dengan nilai eksaknya. Untuk menganalisis eror dan menentukan laju konvergensi metode Bairstow, didefinisikan norm vektor

$$\|h\| = \sum_{i=1}^n h_i. \quad (4.10)$$

5. PENERAPAN DALAM KASUS

Dalam menentukan faktor kuadrat dengan metode Bairstow, perhitungan secara manual sangat tidak efisien. Oleh karena itu, perlu dibuat program yang menggunakan *Mathematica* dan *Microsoft Excel* untuk mempermudah perhitungan.

Kasus 5.1. Diberikan sebuah polinomial yang diambil dari [2] yaitu

$$p_n(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6.$$

Dengan menggunakan metode Bairstow, akan ditentukan faktor kuadrat dari $p_n(x)$. Untuk itu ditentukan nilai pendekatan awal faktor kuadrat yaitu

$$x^2 - u_0x - v_0 = \frac{1}{3}(3x^2 + 4x + 6) = x^2 + \frac{4}{3}x + 2$$

sehingga diperoleh $u_0 = -\frac{4}{3}$, dan $v_0 = -2$. Kemudian diterapkan algoritma (4.9) untuk mengevaluasi pendekatan awal tersebut. Tabel 1 kolom ke-2 dan 3 menunjukkan nilai pendekatan faktor kuadrat untuk Kasus 5.1. Perhitungan

Tabel 1. Nilai pendekatan faktor kuadrat untuk Kasus 5.1

k	u_k	v_k	δu_k	δv_k	$\ h\ $	$\frac{\ h_k\ }{\ h_{k-1}\ ^2}$
0	-1.33333	-2	-	-	-	-
1	-1.73154	-0.753753	-0.39821	1.246247	1.644457	-
2	-1.93128	-1.94511	-0.19974	-1.19136	1.391097	0.514414
3	-2.00019	-1.99503	-0.06891	-0.04992	0.11883	0.061406
4	-2	-1.99999	0.00019	-0.00496	0.00515	0.364716
5	-2	-2	0	-0.00001	0.00001	0.377038

dapat dihentikan sampai iterasi ke-5 dengan nilai pendekatan faktor kuadrat yang dimaksud adalah $x^2 - ux - v = x^2 - 2x - 2$. Oleh karena itu, $p_n(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ dapat dinyatakan sebagai

$$p_n(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 3).$$

Dengan demikian dapat diperoleh akar-akar $p_n(x)$ yaitu $(-1 - i, -1 + i, 0.5 - 1.65831i, 0.5 + 1.65831i)$. Selanjutnya, diterapkan persamaan (4.10) untuk menganalisis eror. Diambil $h_1 = \delta u_k$ dan $h_2 = \delta v_k$, diperoleh hasil pada Tabel 1 kolom ke-4 dan 5. Untuk Kasus 5.1, metode Bairstow menghasilkan nilai pendekatan faktor kuadrat $x^2 - ux - v$ yang sangat akurat dengan estimasi eror sebesar $(0, 0.00001)$. Hal ini menunjukkan bahwa metode Bairstow mempunyai laju konvergensi yang tinggi (bukan linear). Dengan demikian perlu ditentukan berapa laju konvergensinya. Dari Tabel 1 kolom terakhir baris terakhir dapat diketahui bahwa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|h_k\|}{\|h_{k-1}\|^2} = 0.377038.$$

Kasus 5.2. Diberikan sebuah polinomial yang diambil dari [4] yaitu

$$p_n(x) = x^4 - 16.$$

Seperti dalam Kasus 5.1, ditentukan nilai pendekatan awal faktor kuadrat yaitu

$$x^2 - u_0x - v_0 = -16$$

sehingga diperoleh $u_0 = 0$, dan $v_0 = 16$. Selanjutnya diterapkan algoritma (4.9) dan (4.10) untuk mengevaluasi nilai pendekatan awal tersebut dan menganalisis erornya. Tabel 2 kolom ke-2 dan 3 menunjukkan nilai pendekatan faktor kuadrat untuk Kasus 5.2. Perhitungan dapat dihentikan sampai iterasi ke-5 dengan nilai

Tabel 2. Nilai pendekatan faktor kuadrat untuk Kasus 5.2

k	u_k	v_k	δu_k	δv_k	$\ h\ $	$\frac{\ h_k\ }{\ h_{k-1}\ ^2}$
0	0	16.	-	-	-	-
1	0	8.5	0	-7.5	7.5	-
2	0	5.19118	0	-3.30882	3.30882	0.058823
3	0	4.13666	0	-1.05452	1.05452	0.096318
4	0	4.00226	0	-0.1344	0.1344	0.120862
5	0	4.	0	-0.0226	0.00226	0.125115

pendekatan faktor kuadrat yang dimaksud adalah $x^2 - ux - v = x^2 - 4$. Oleh karena itu, $p_n(x) = x^4 - 16$ dapat dinyatakan sebagai

$$p_n(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$$

sehingga dapat diperoleh akar-akar $p_n(x)$ yaitu $(-2, 2, -2i, 2i)$. Selanjutnya, diterapkan persamaan (4.10) untuk menganalisis eror. Untuk Kasus 5.2, metode Bairstow menghasilkan nilai pendekatan faktor kuadrat $x^2 - ux - v$ yang sangat akurat dengan estimasi eror sebesar $(0, -0.0226)$. Hal ini menunjukkan bahwa metode Bairstow mempunyai laju konvergensi yang tinggi (bukan linear). Dengan demikian perlu ditentukan berapa laju konvergensinya. Dari Tabel 2 kolom terakhir baris terakhir dapat diketahui bahwa

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|h_k\|}{\|h_{k-1}\|^2} = 0.125115.$$

6. KESIMPULAN

Berdasarkan penurunan algoritma dan penerapan dalam Kasus 5.1 dan 5.2, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

- (1) Dalam menentukan faktor kuadrat dengan metode Bairstow, digunakan pembagian sintetik dengan pembagi kuadrat sehingga dapat ditentukan dua akar sekaligus baik akar real maupun kompleks. Algoritma metode Bairstow diturunkan ulang dari metode Newton dengan evaluasi matriks Jacobi secara efisien menggunakan metode Horner. Algoritma metode Bairstow adalah

$$u_{new} = u + \delta u$$

$$v_{new} = v + \delta v.$$

- (2) Dalam Kasus 5.1, diperoleh nilai faktor kuadrat $p_n(x)$ yaitu $(x^2 + 2x + 2)$ dan $(x^2 - x + 3)$. Oleh karena itu, diperoleh akar-akar $p_n(x)$ yaitu $(-1 - i, -1 + i, 0.5 - 1.65831i, 0.5 + 1.65831i)$. Sedangkan dalam Kasus 5.2, diperoleh nilai faktor kuadrat $p_n(x)$ yaitu $(x^2 - 4)$ dan $(x^2 + 4)$. Oleh karena itu, diperoleh akar-akar $p_n(x)$ yaitu $(-2, 2, -2i, 2i)$.
- (3) Dalam Kasus 5.1 dan 5.2, metode Bairstow menghasilkan nilai pendekatan faktor kuadrat yang sangat akurat dengan estimasi eror masing masing $(0, 0.00001)$ dan $(0, -0.0226)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa metode Bairstow mempunyai laju konvergensi yang tinggi (bukan linear). Tampak dalam Tabel 1 dan 2 kolom terakhir baris terakhir, metode bairstow mempunyai laju konvergensi kuadrat dengan konstanta 0.377038 untuk Kasus 5.1 dan 0.125115 untuk Kasus 5.2.

DAFTAR PUSTAKA

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Bairstow's_method.
 2. *Module for the lin-bairstow method*, http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/bairstow_method.
 3. R. L. May, *Approximation and quadrature*, Royal Melbourne Institute of Technology Ltd., Melbourne, 1991.
 4. S. R. Schmitt, *Solving polynomial equations with the lin-bairstow method*, <http://home.att.net/Esrschmitt/zeno.html>.
-